AUFGABENGRUPPE A **07.03.2019**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

   a) $(x+81) \cdot 27x^2 \cdot (x-9) = 0$

   b) $(x^2-81) \cdot 27x^2 < 0$

   c) $(x^2-81)^2 = (x+9)^2 \cdot (x-9)^2$

   d) $(x-9)^3 \cdot (x^2-81) \geq 0$

2. a) Zeichne ein Koordinatensystem mit $-8 < x < 6$ und $-4 < y < 10$ und trage folgende Punkte ein: $S(0|0)$, $P(-5|-2)$ und $Q(0|-4)$. Zeichne auch die Geraden g_1 durch P und S sowie g_2 durch Q und S ein.

   b) (1) $A(5|-3)$ ist der Eckpunkt eines Dreiecks ABC, dessen Höhen h_c auf g_1 und h_b auf g_2 liegen und sich in S schneiden. Konstruiere dieses Dreieck.

   (2) $A(5|-3)$ ist der Eckpunkt eines Dreiecks $AB'C'$, dessen Mittelsenkrechten $m_{c'}$ auf g_1 und $m_{b'}$ auf g_2 liegen und sich in S schneiden. Konstruiere dieses Dreieck.

   c) P und Q sind nun Eckpunkte des Dreiecks PQR, dessen Seitenhalbierenden auf g_1 und g_2 liegen und sich in S schneiden. $\overline{QS}$ ist doppelt so lang wie die Strecke $\overline{SM_q}$. Konstruiere dieses Dreieck.

3. a) Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ und $\alpha = 90°$, $a = |AB| = 6{,}2$ cm, $d = |AD| = 4{,}6$ cm und $c = |DC| = 3{,}8$ cm.

   b) Die Winkelhalbierenden w_β und w_γ im Trapez $ABCD$ aus Teilaufgabe a) schneiden sich im Punkt S. Begründe:

   (1) $\sphericalangle BSC = 90°$

   (2) Der Abstand von S zur Seite $\overline{BC}$ ist genauso groß wie der Abstand von S zur Seite $\overline{DC}$.

   (3) Der Abstand von S zur Seite $\overline{DC}$ ist genauso groß wie der Abstand von S zur Seite $\overline{AB}$.

   c) Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch S schneidet $\overline{BC}$ in E. Zeige: Das Dreieck SEC ist gleichschenklig.

4. Bei einer Rabattaktion verteilt ein Supermarkt für einen Einkauf einen gelben und einen roten Rabattchip, auf denen verschiedene Prozentzahlen stehen können. Der gelbe Chip kann einmalig zur Reduzierung für ein Produkt eingelöst werden, der rote Chip reduziert zudem den gesamten Einkaufspreis.

   a) Tim, Peter, Maria und Nora kaufen jeweils zwei Artikel: einen für 20 € und einen für 10 €.

   (1) Tim hat einen gelben Chip mit 10 % und einen roten Chip mit 20 %. Begründe durch Rechnung, für welchen Artikel er den gelben Chip einsetzen sollte.

   (2) Peter hat einen gelben 20 %-Chip und einen roten 10 %-Chip. Kann er weniger bezahlen als Tim? Begründe durch Rechnung.

   (3) Maria hat einen gelben 25 %-Chip und löst ihn für den 20 €-Artikel ein. Durch den Einsatz des roten Chips muss sie am Ende 23,75 € zahlen. Welche Prozentzahl steht auf ihrem roten Chip?

   (4) Nora hat einen gelben und einen roten Chip, auf denen die gleichen Prozentzahlen p stehen. Stelle einen Term für ihren günstigsten Gesamtpreis auf.

   b) Elena kauft zwei gleiche Artikel ein und hat Glück: Auf ihrem gelben und roten Chip steht jeweils 50 %. Sie bezahlt insgesamt 52,50 €. Bestimme den ursprünglichen Preis für *einen* Artikel.

5. In eine Zahlenmaschine wird eine natürliche Zahl $n = 1; 2; 3; \ldots$ eingegeben. Ist die gegebene Zahl n gerade, so wird sie durch die Maschine halbiert und dieses Ergebnis ausgegeben. Ist n ungerade, so beträgt die Ausgabe $n - 1$.

   a) Die Ausgabe nach einem Rechenschritt beträgt 6.
   Welche Zahlen können in die Maschine eingegeben worden sein?

   Nun wird jeweils die ausgegebene Zahl erneut in die Maschine eingegeben, und zwar so lange, bis 0 ausgegeben wird.

   b) Wie viele Rechenschritte werden dafür bei $n = 32$, wie viele bei $n = 100$ benötigt?

   c) Eine Zahl, bei der k Rechenschritte bis zur Ausgabe von 0 notwendig sind, nennen wir eine k-Schritt-Zahl.

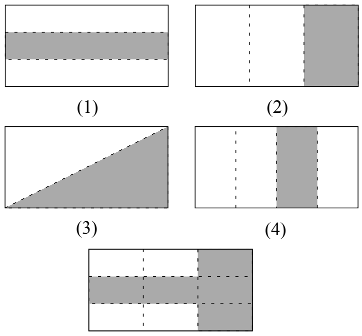
      (1) Gib alle 4-Schritt-Zahlen an.

      (2) Gib alle 5-Schritt-Zahlen an.

   d) Wie viele Schritte erfordert $n = 1 + 2^8 + 2^{20}$?

   e) Bestimme die kleinste 8-Schritt-Zahl, die kleiner als 31 ist.

6. Es stehen vier rechteckige Glas-Plättchen (jeweils 6 cm lang und 3 cm breit) zur Verfügung, die teilweise abgedunkelt (grau) sind. Wie in der Abbildung zu sehen ist, sind die Plättchen 1 und 2 zu je einem Drittel, Plättchen 3 zur Hälfte und Plättchen 4 zu einem Viertel abgedunkelt.

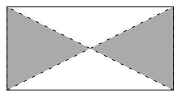

(1) (2) (3) (4) (1) und (2)

   Die Plättchen sollen nun deckungsgleich (ohne sie zu drehen oder zu wenden) übereinander gelegt werden, etwa die Plättchen 1 und 2:

   a) Welcher Anteil wird abgedunkelt, wenn die Plättchen
      (1) 1 und 2 (2) 2 und 3 (3) 1, 2 und 3
      übereinander gelegt werden?

   b) Welche der abgebildeten Plättchen muss man übereinander legen, wenn insgesamt $\frac{2}{3}$ der Fläche abgedunkelt sein sollen?

   c) Zeichne ein eigenes Plättchen, sodass ein Anteil von $\frac{2}{3}$ verdunkelt ist, wenn man es über Plättchen 5 legt.


(5)

   d) Welcher Anteil der Plättchen wird doppelt abgedunkelt, wenn man die Plättchen (1) 2 und 4 (2) 3 und 4 übereinander legt?

7. Beim Bottle Flip werfen Ben und Finn abwechselnd eine Flasche möglichst so, dass sie auf ihrem Boden stehen bleibt. Finn schafft dies in 30 % seiner Würfe. Ben gelingt dies nur in 20 % seiner Würfe. Sieger ist der Werfer, dem es in einer Spielrunde als Erstem gelingt, dass die Flasche auf ihrem Boden stehen bleibt. Ben wirft zuerst.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Finn mit dem insgesamt vierten Wurf der Spielrunde (d. h. mit seinem zweiten Wurf) gewinnt?

   b) Die Spielrunde soll maximal 6 Würfe haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Finn sie gewinnt?

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Flasche mindestens 4-mal in einer Spielrunde geworfen?

   d) Gegeben ist die folgende Wahrscheinlichkeit: $\mathrm{P(E)} = (0{,}8 \cdot 0{,}7)^n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3$.

      (1) Wer gewinnt in diesem Fall die Spielrunde?

      (2) Wie oft wurde in diesem Fall die Flasche insgesamt geworfen?

   e) Ben trainiert allein. Wie oft muss er die Flasche mindestens werfen, damit die Flasche mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 50 % mindestens einmal auf ihrem Boden steht?

(**Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.**)

AUFGABENGRUPPE B **07.03.2019**

Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge jeweils in aufzählender Form an; $\mathbb{G} = \mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$.

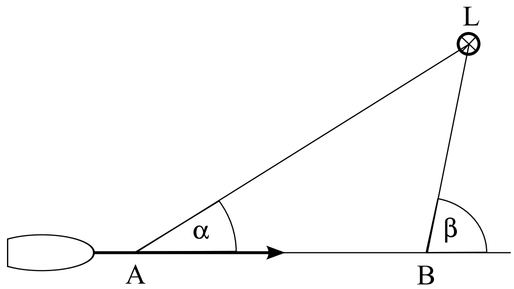
   a) $8 \cdot (0{,}7x + 5) = 0{,}6 \cdot (15 + 6x) + 9$

   b) $5x + 2 \cdot (x^2 - 1) = (x + 1) \cdot (x + 3) + x^2$

   c) $-4 - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + (4 + 2x)$

   d) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

2. Ein Kapitän fährt mit seinem Schiff bei ruhiger See mit einer Geschwindigkeit von 15 Knoten. In Position A sieht er einen Leuchtturm L unter einem Winkel von $\alpha = 28°$ zur Fahrtrichtung. Nach zwanzig Minuten befindet sich das Schiff in Position B. Von dort sieht der Kapitän den Leuchtturm im Winkel von $\beta = 80°$ zur Fahrtrichtung.



   a) Berechne die Länge der zurückgelegten Strecke $\overline{AB}$. Rechne mit 1 Knoten $\hat{=}\ 2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

   b) Ermittle durch eine (Dreiecks-)Konstruktion die Länge der Strecken $\overline{AL}$ und $\overline{BL}$. Dabei soll jeweils 1 km Fahrtstrecke 1 cm in der Zeichnung entsprechen.

   c) (1) Simon sagt: „Ungefähr 2 km weiter nach Position B hat das Schiff zum Leuchtturm wieder den gleichen Abstand wie in Position B.“ Hat Simon recht? Begründe.

   (2) Nach wie viel Minuten Fahrt von Punkt A aus hat das Schiff den geringsten Abstand zum Leuchtturm? Notiere den passenden Buchstaben.
   A: 14 Minuten B: 18 Minuten C: 22 Minuten D: 26 Minuten

3. a) Zeichne in ein Koordinatensystem (1 LE $\hat{=}$ 1 cm) das Trapez $ABCD$ mit $A(-1|4)$, $B(-5|0)$, $C(-1|0)$ und $D(0|1)$. Beschrifte die Eckpunkte.

   b) Spiegele das Trapez $ABCD$ an der y-Achse. Benenne die Bildpunkte mit A', B', C' und D'.

   c) Der Punkt E ist der Schnittpunkt der Geraden durch A und B mit der Geraden durch A' und B'.

   (1) Gib die Koordinaten des Punktes E an und ergänze ihn in der Zeichnung.

   (2) Welches spezielle Viereck ist das Viereck $ADA'E$?

   (3) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $ADA'E$.

   d) Gib die Koordinaten eines Punktes F an, so dass der Flächeninhalt des Vierecks $ADA'F$ halb so groß ist wie der Flächeninhalt des Vierecks $ADA'E$.

4. Das Produkt der Zahlen von 1 bis n nennt man in der Mathematik „n-Fakultät“ und wird als „$n!$“ geschrieben. Zum Beispiel gilt:

   $1! = 1$
   $2! = 1 \cdot 2 = 2$
   $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$
   $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 = 3\,628\,800$

   a) Bestimme die Variable a, wenn $4! = a$ gilt.

   b) Bestimme die Variable b, wenn $11! = b$ gilt.

   c) Bestimme die Variable c, wenn $c! = 720$ beträgt.

   d) Berechne jeweils die Variable x in den folgenden Gleichungen.

   (1) $8! \cdot x = 10!$ (2) $x = \frac{16!}{15!}$ (3) $\frac{33!}{x!} = 33$ (4) $\frac{n!}{(n-1)! \cdot n} = x$

5. Bis zum Schuljahr 2016/17 wurden in Hessen Schülerjahreskarten, z.B. als *CleverCard*, verkauft. Mittlerweile gibt es das *Schülerticket Hessen*, mit dem Schüler und Auszubildende mit Bus und Bahn das ganze Jahr durch Hessen fahren können. Für die Bezahlung des *Schülerticket Hessen* gibt es zwei Optionen: (1) einmalig 365 € für ein Jahr oder (2) monatlich 31 € für 12 Monate

   a) Im Schuljahr 2017/18 nutzten 400 000 Schüler das neue *Schülerticket Hessen*. Dies war eine 60-prozentige Erhöhung im Vergleich zur Anzahl der im Vorjahr verkauften Schülerjahreskarten. Wie viele Schülerjahreskarten wurden im Vorjahr verkauft?

   b) Marko behauptet: „Wenn ich monatlich zahle, dann ist das *Schülerticket Hessen* mehr als 2 % teurer als bei einmaliger Zahlung.“ Hat er recht? Begründe.

   c) Die Stadt Frankfurt bietet das *Schülerticket Hessen* bei Einmalzahlung für Frankfurt-Pass-Inhaber 34 % günstiger an.
   Wie viel kostet für Frankfurt-Pass-Inhaber ein *Schülerticket Hessen*?

   d) Nina hat jeden Monat das *Schülerticket Hessen* gekauft, ihr Cousin Peter einmal im Jahr das über Südhessen hinaus gültige *MAXX-Ticket*. Es kostet bei einmaliger Zahlung pro Jahr 152,20 € mehr als die Einmalzahlung für das *Schülerticket Hessen*. Wie viel Prozent bezogen auf einen Monat hat Peter mehr für sein Ticket bezahlt als Nina? Runde auf ganze Prozent.

6. Der Zugang zu einem Smartphone wird häufig durch eine mehrstellige PIN gesichert. Erst nach korrekter Eingabe dieser PIN lässt sich das Gerät bedienen. Für jede Stelle der PIN kann eine beliebige Ziffer von 0 bis 9 ausgewählt werden.

   a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es für eine vierstellige PIN insgesamt?

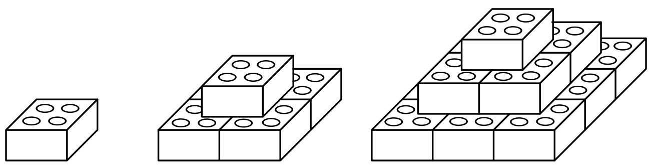
   b) Ralph möchte für seine vierstellige PIN nur die Ziffern 0 oder 1 verwenden.
   (1) Notiere ein Beispiel. (2) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er?

   c) Paula hat ihr Smartphone mit einer vierstelligen Zahl, in der die Ziffern 2, 0, 1 und 9 genau einmal vorkommen, gesichert. Sie hat ihre PIN vergessen. Paula erinnert sich aber daran, dass die Zahl gerade ist und die erste Ziffer keine 9 war. Schreibe alle Möglichkeiten für Paulas PIN auf.

   d) Die PIN von Michaela besteht aus vier verschiedenen Ziffern. Weiterhin weiß man, dass die 1. Ziffer doppelt so groß ist wie die 2. Ziffer und die 4. Ziffer dreimal so groß ist wie die 3. Ziffer. Schreibe alle sechs Möglichkeiten auf.

   e) Auf modernen Smartphones muss man häufig eine sechsstellige PIN eingeben. Oft wird als PIN ein bestimmtes Datum ausgewählt, so z. B. für den heutigen Tag die PIN 070319. David hat als PIN seinen Geburtstag gewählt. Er wird, von heute an gerechnet, in genau 66 Tagen 14 Jahre alt. Wie lautet die PIN von Davids Smartphone?

7. a) Die Abbildungen zeigen die ersten drei Figuren einer Folge von Bausteinpyramiden. In Figur 1 sind vier Noppen eines (2 × 2)-Bausteines sichtbar. Bei Figur 2 sind in der unteren Ebene 12 Noppen sichtbar.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

   (1) Übertrage die Tabelle und ergänze die Werte in den weißen Kästchen.

Figur n	1	2	3	...	5	...		...	
sichtbare Noppen in der untersten Ebene	4	12					84		
sichtbare Noppen (insgesamt)	4	16							900

   (2) Mit zwei der nachfolgenden Terme lässt sich die Gesamtanzahl der sichtbaren Noppen korrekt ermitteln. Notiere die Lösungsbuchstaben.
   A: $4n^2$ B: $2\,(n+1)^2$ C: $(4n)^2$ D: $(2n)^2$ E: $2\,(n-1)^2$

   b) Anstelle der (2 × 2)-Bausteine aus Teilaufgabe a) wird die Bausteinpyramide nun aus (4 × 4)-Bausteinen mit jeweils 16 Noppen gebaut.
   Wie viele Noppen sind bei der 3. Figur insgesamt sichtbar?

AUFGABENGRUPPE C 07.03.2019

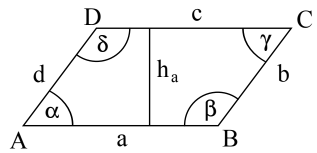
Hinweis: Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Fasse den nachfolgenden Term so weit wie möglich zusammen: $5x - 2y + 15 - 2x + 17y + 123$

   b) Berechne x: (1) $9x - 4 = 8 + 7x$ (2) $34x + 12 - 4x = -2x + 62 + 7x$

   c) Kai kauft sich im Schulbistro zwei Käsebrötchen für je 1,25 €, einen Schokoriegel für 0,70 € und eine Flasche Wasser für 1,10 €. Für Lisa bringt er noch ein Frikadellenbrötchen mit. Insgesamt bezahlt er 5,80 €. Wie teuer ist das Frikadellenbrötchen?

2. Die Abbildung zeigt ein Parallelogramm $ABCD$.



   a) Das Parallelogramm $ABCD$ hat die Seitenlängen $a = 7{,}5$ cm und $b = 6$ cm. Der Winkel α ist $50°$ groß.

   (1) Konstruiere das Parallelogramm $ABCD$ und beschrifte die Eckpunkte.

   (2) Gib die Größen der Winkel β und γ an.

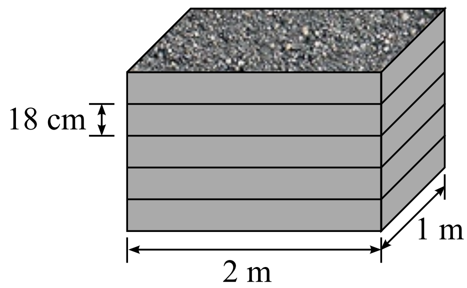
   (3) Zeichne eine Höhe h_b in dein konstruiertes Parallelogramm ein.

   b) Ein anderes Parallelogramm $ABCD$ hat die Seitenlänge $a = 5$ cm. Die Höhe h_a ist 3,2 cm lang. Der Umfang des Parallelogramms beträgt 17,6 cm.

   (1) Berechne den Flächeninhalt des Parallelogramms.

   (2) Berechne die Länge der Seite b.

3. Die Garten-AG einer Schule möchte ein quaderförmiges Hochbeet bauen. Die Innenmaße der Gesamtfläche des Hochbeetes sind 2 m und 1 m.



   a) Für die vier Seiten des Hochbeetes werden jeweils 5 Holzbretter aufeinander befestigt. Ein Holzbrett ist 18 cm hoch (siehe Abbildung). Berechne das maximale Füllvolumen des Hochbeetes.

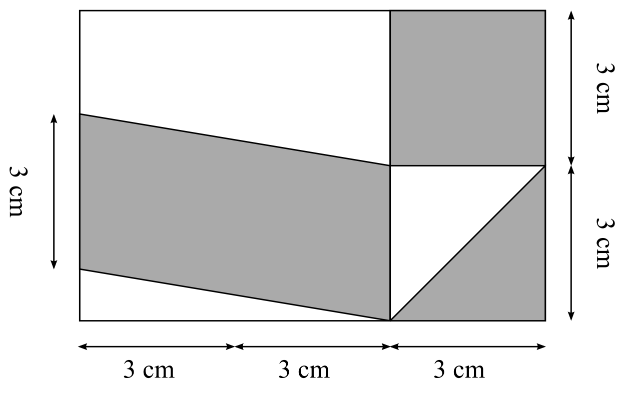
   b) Die Füllung des Hochbeetes besteht aus zwei Schichten. Die untere Schicht besteht aus Gartenabfällen. Sie nimmt $\frac{2}{3}$ des gesamten Volumens ein. Der Rest wird mit Pflanzerde aufgefüllt.

   (1) Wie viele Kubikmeter Pflanzenerde werden benötigt?
   Nutze dein Ergebnis aus Teilaufgabe a).

   (2) Wie hoch ist die Schicht der Gartenabfälle?

   c) Das Hochbeet soll mit Kräutern bepflanzt werden. Sarah kauft in der Gärtnerei 60 Pflanzen. Reicht die Pflanzfläche des Hochbeetes für alle Pflanzen aus, wenn eine Pflanze 400 cm^2 Platz benötigt? Überprüfe durch eine Rechnung und notiere einen Antwortsatz.

4. Ein Rechteck ist in verschiedene Teilflächen zerlegt worden (siehe Abbildung).



   a) (1) Berechne, wie groß die drei grauen Teilflächen insgesamt sind.

   (2) Um wie viel Quadratzentimeter sind die gesamten grauen Teilflächen größer als die gesamten weißen Teilflächen?

   b) Wie viel Mal kann die gesamte Fläche des Rechtecks mit dem grauen Dreieck vollständig ausgelegt werden?

5. Tom hatte einen Ferienjob auf einer Baustelle und wurde nach Arbeitsstunden bezahlt.

   a) In der ersten Woche hat er 15 Stunden gearbeitet und dafür 157,50 € erhalten.

      (1) In der zweiten Woche arbeitete er nur 13 Stunden. Berechne, wie viel er verdient hat.

      (2) Insgesamt hat Tom in den Ferien 336 € verdient. Berechne, wie viele Stunden er insgesamt gearbeitet hat. Benutze den berechneten Stundenlohn aus Teilaufgabe a) (1).

   b) An einem Tag musste Tom Dachziegel stapeln. Ein Stapel hatte 6 Dachziegel. So entstanden 160 Stapel. Berechne, wie viele Stapel entstanden wären, wenn er 8 Dachziegel aufeinander gestapelt hätte.

   c) Für die gesamten Tätigkeiten auf der Baustelle plant die Baufirma eine Dauer von insgesamt 12 Arbeitstagen mit 6 Arbeitern ein. Nach 10 Arbeitstagen werden 2 Arbeiter auf einer anderen Baustelle eingesetzt. Berechne, wie viele Tage es nun insgesamt dauert, bis die gesamten Tätigkeiten fertig sind.

6. Im Jahr 2018 wurden 800 Jugendliche aus den Jahrgangsstufen 8 und 9 befragt, wie sie auf ihren Praktikumsbetrieb aufmerksam wurden.

   a) Die folgende Tabelle zeigt das Ergebnis dieser Umfrage.

	Wie bist Du auf deinen Praktikumsbetrieb aufmerksam geworden? (Du musst Dich für eine Antwortmöglichkeit entscheiden.)	Anteil der Jugendlichen
A	Verwandte sind in dem Betrieb beschäftigt und haben ihn empfohlen.	26 %
B	Freunde haben mir den Betrieb empfohlen.	45 %
C	Ich habe den Betrieb bei der Recherche im Internet gefunden.	19 %
D	Ich habe mich von Lehrern beraten und unterstützen lassen.	
E	Sonstiges	

      (1) Berechne, wie viele Jugendliche Antwortmöglichkeit B nannten.

      (2) Der Schulleiter behauptet, dass weniger als $\frac{3}{4}$ der Jugendlichen Antwortmöglichkeit A oder B nannten. Begründe durch Rechnung, dass der Schulleiter recht hat.

      (3) Antwortmöglichkeit E wurde von den Jugendlichen dreimal so oft genannt wie Antwortmöglichkeit D. Gib an, wie viel Prozent der Jugendlichen Antwortmöglichkeit E nannten.

   b) Im Jahr 2017 sind insgesamt nur 500 Jugendliche zum selben Thema befragt worden. Berechne, um wie viel Prozent die Anzahl der befragten Jugendlichen im Jahr 2018 angestiegen ist.

7. In einer großen Lostrommel sind 30 Nieten und 30 Gewinne. Davon sind 6 Lose Hauptgewinne und 24 Lose Kleingewinne.

   a) Wie viele Lose sind insgesamt in der Trommel?

   b) Aus der vollen Lostrommel wird ein Los gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

      (1) ein Hauptgewinn gezogen wird,

      (2) eine Niete gezogen wird,

      (3) eine Kleingewinn gezogen wird?

      Gib bei (3) die Wahrscheinlichkeit auch in Prozent an.

   c) Aus dieser vollen Lostrommel hat Luise nacheinander bereits 5 Nieten gezogen.
      Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, mit dem nächsten Los einen Gewinn zu ziehen?

   d) Diese Lostrommel soll durch eine kleine Lostrommel mit 10 Losen ersetzt werden. Die Wahrscheinlichkeiten sollen gleich bleiben. Gib an, wie viele Lose mit Hauptgewinn und wie viele Lose mit Kleingewinn beschriftet werden müssen.

   e) Die Wahrscheinlichkeit für Gewinne in der vollen großen Lostrommel soll nur noch 40 % betragen. Wie viele und welche Lose müssen zusätzlich in die Lostrommel gelegt werden?
      Gib dafür ein Beispiel an.