

AUFGABEN DER GRUPPE A

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden diejenigen mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Bestimme die natürlichen Zahlen a und b , die jeweils die Gleichung erfüllen; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

a) $6a - a^2 = b$

b) $\frac{a}{b+1} = a - 4$

c) $\frac{a}{b} + \frac{2}{a} = 1$

2. Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90^\circ$ liegt der Punkt D so auf \overline{AB} , dass $|CD| = |CB|$. Die Strecke \overline{CD} wird so verlängert, dass dadurch das rechtwinklige Dreieck AED entsteht; es gilt: $\alpha < 45^\circ$.

- a) (1) Zeige: $\angle EAD = \alpha$.

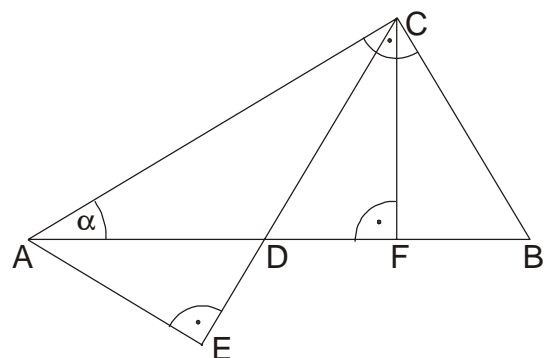
(2) Gib die Größe des Winkels $\angle DCB$ in Abhängigkeit von α an.

(3) Wo liegt der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte A, E, F und C ? Begründe!

(4) Zeige: $|FC| = |FE|$.

- b) Das Viereck $AEFC$ ist ein symmetrisches Trapez mit der Grundseite \overline{AC} .

Wie groß ist α ? Wie groß ist der Winkel $\angle FEC$?



3. Peter bekommt leicht einen Sonnenbrand, daher hat ihm sein Arzt empfohlen, sich höchstens $\frac{1}{4}$ Stunde ungeschützt in der Sonne aufzuhalten. Verwendet er z.B. Sonnencreme mit Lichtschutzfaktor (LSF) 8, kann er jedoch achtmal so lange in der Sonne bleiben, da nur $\frac{1}{8}$ der schädlichen UV-Strahlung auf seine Haut trifft.

a) Peter möchte 3 Stunden in der Sonne bleiben. Welchen Lichtschutzfaktor sollte die Sonnencreme mindestens haben?

b) An einem sonnigen Tag verwendet Peter eine Sonnencreme mit LSF 5. Nach 45 Minuten kühlt er sich unter der Dusche ab, wodurch sich die Wirkung der Creme halbiert. Wie lange sollte er nach dem Duschen höchstens noch in der Sonne bleiben, wenn er sich nicht erneut eincremt?

c) Am nächsten Tag benutzt er eine Sonnencreme mit LSF 10 und setzt sich nach 2 Stunden unter einen Sonnenschirm. Unter diesem verweilt er noch drei weitere Stunden. Wie viel Prozent der schädlichen UV-Strahlung darf der Sonnenschirm höchstens durchlassen, wenn Peter die Empfehlung des Arztes befolgen will? Runde auf eine Nachkommastelle!

d) Ina verwendet eine Creme mit LSF 20.

(1) Wie viel Prozent der schädlichen UV-Strahlung wird zurückgehalten?

(2) Wie viel Prozent mehr würde eine Creme mit LSF 40 zurückhalten? Runde auf zwei Nachkommastellen!

4. a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $|AB| = 10$ cm, $h_C = 4$ cm und $\gamma = \angle ACB = 90^\circ$.

b) Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $|AB| = 7$ cm, $|BD| = 6$ cm, $|AD| = 5$ cm, $\angle ACB = 50^\circ$ und $AB \parallel CD$.

c) Konstruiere ein Dreieck ABC mit $|AB| = 9$ cm, $|BC| = 8$ cm und $|AC| = 7$ cm. Konstruiere im Inneren dieses Dreiecks einen Punkt P so, dass gilt $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA$.

5. a) Tom, Jan, Bernd und Alf fahren mit ihren Fahrrädern zum Freizeitpark. Sie streiten sich, wer die kürzere Strecke kennt. Tom und Jan starten gleichzeitig. Tom fährt mit 30 km/h; sein Weg ist 45 km lang. Jan ist nur 27 km/h schnell.
- (1) Wie lang ist Jans Weg, wenn er zur gleichen Zeit wie Tom ankommt?
 - (2) Bernd und Alf starten 15 Minuten später.
Bernd fährt Tom hinterher. Berechne seine Geschwindigkeit, wenn er gleichzeitig mit Tom ankommt.
Alf fährt mit 36 km/h Jan hinterher. Nach welcher Zeit hat er Jan eingeholt?
- b) Anne und Lena fahren zum Schwimmbad, beide auf demselben Weg. Sie starten gleichzeitig. Lena fährt durchgehend mit 15 km/h. Als Lena am Schwimmbad ankommt, muss Anne noch 1 km fahren.
- (1) Wähle zwei mögliche Streckenlängen und bestimme die jeweils dazugehörige Geschwindigkeit von Anne.
 - (2) Notiere eine Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit v von Anne in Abhängigkeit von der Streckenlänge s .

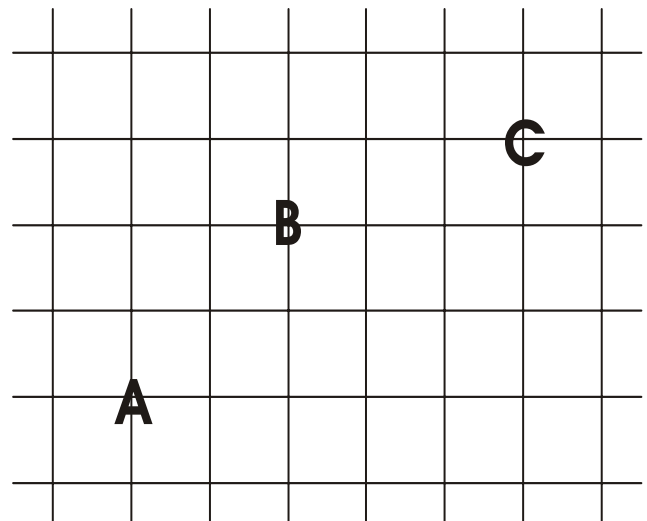
6. Streicht man nacheinander von einer natürlichen Zahl die letzte Ziffer, so erhält man eine Folge natürlicher Zahlen.

Beispiel: 8642; 864; 86; 8

Addiert man diese vier Zahlen, so erhält man die Summe $S(8642) = 9600$.

- a) Bestimme die größte vierstellige Zahl x , für die $S(x)$ vierstellig ist.
- b) Für welche vierstellige Zahl y gilt: $S(y) = 2005$?
- c) Zeige, dass es keine vierstellige Zahl z gibt, für die $S(z) = 2009$ ist.
- d) (1) Wie verändert sich die Summe $S(t)$, wenn nur die Zehnerziffer der Zahl t um 1 erhöht wird?
(2) Gib zwei Zahlen a und b an, für die gilt: $S(a) - S(b) = 333$
(3) Seien c und $c + 1$ vierstellige Zahlen. Welche Werte kann die Differenz $S(c + 1) - S(c)$ annehmen? Gib jeweils ein entsprechendes Zahlenpaar $(c+1|c)$ an!

7. Alle Straßen einer Stadt sind parallel zueinander oder schneiden sich rechtwinklig. Die Abstände zwischen zwei benachbarten Kreuzungspunkten sind jeweils gleich groß. Das Straßennetz sieht also aus wie kariertes Papier. Ein Taxi steht an Kreuzung A; zur Kreuzung B beträgt die Entfernung 4 LE. (Taxis fahren nie Umwege!)



- a) Bestimme die Länge der Fahrstrecke zwischen A und C.
- b) Auf wie vielen Wegen kann das Taxi von A nach B gelangen?
- c) Wie viele Möglichkeiten hat der Taxifahrer, von A über B nach C zu gelangen?
- d) Wie viele Kreuzungen haben vom Taxistand A die Entfernung 3 LE?
- e) Von A haben 48 Kreuzungen jeweils die gleiche Entfernung. Gib diese Entfernung an.
- f) Ein Fahrgast wartet in der gleichen Straße wie B, aber 10 Kreuzungen weiter rechts. Wie viele Möglichkeiten hat der Taxifahrer, von A dorthin zu gelangen?

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2004/2005 DES LANDES HESSEN

AUFGABEN DER GRUPPE B

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden diejenigen mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. Gib die Lösungsmenge in aufzählender Form an. $G = \mathbb{Z}$.

a) $11x - (5 - 6x) = 6 \cdot (7x - 5)$

b) $(x + 6)^2 - (x - 5)^2 = 0$

c) $6x^2 - 6 = (2x + 2) \cdot (3x - 3)$

d) $(4x + 2) \cdot (4x - 2) < 8x \cdot (2x - 5)$

e) $x^2 \cdot (x - 9) > 0$

2. Bei einem neuen Internetanschluss hat man die Wahl zwischen den Providern QUICK und FAST. FAST verlangt bei jeder Einwahl 9 Cent und 0,2 Cent pro Minute. Bei QUICK kostet jede angefangene Minute 0,5 Cent ohne Einwahlgebühr.

a) Thorben benutzt QUICK und war eine Stunde online.

(1) Welche Gebühren fallen dafür an?

(2) Wie lange hätte er bei FAST für denselben Preis surfen können?

b) Ergänze die Tabelle:

Zeit	1 min	10 min		
Kosten bei QUICK			11 Cent	
Kosten bei FAST				19 Cent

c) Ab welcher Nutzungsdauer ist FAST günstiger als QUICK?

d) Thorben benutzt QUICK und zahlt doppelt so viel, wie er bei FAST bezahlt hätte. Wie lange war Thorben online?

3. In einem Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm sind die Punkte $A(-2 | -3)$; $B(4 | -3)$ und $C(2 | 1)$ gegeben.

a) Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem ein und ergänze einen Punkt D so, dass ABCD ein Parallelogramm ist. Gib die Koordinaten von D an und berechne den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.

b) Ergänze die Punkte ABC so um einen Punkt E, dass AEBC ein Drachenviereck ist. Gib die Koordinaten von E an und berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks.

c) Ergänze die Punkte ABC so um einen Punkt F, dass ABCF ein symmetrisches Trapez wird. Gib die Koordinaten des Punktes F an und berechne den Flächeninhalt des Trapezes ABCF.

d) Ergänze die Punkte ABC so um einen Punkt G, dass ABCG ein Trapez mit dem Flächeninhalt 28 cm^2 wird. Gib die Koordinaten von G an.

e) Die Punkte $A(-2 | -3)$ und $B(4 | -3)$ sollen zu einem 8 cm^2 großen symmetrischen Trapez ABHK ergänzt werden. Gib die Koordinaten von H und K an. Gib zwei Möglichkeiten an.

4. a) Konstruiere zwei nicht zueinander kongruente Dreiecke ABC mit $|AB| = c = 6 \text{ cm}$, $h_c = 4,5 \text{ cm}$ und $|BC| = a = 6,5 \text{ cm}$.

b) Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC ($\alpha = 90^\circ$) mit $|BC| = a = 6 \text{ cm}$ und $h_a = 2,5 \text{ cm}$.

c) Konstruiere das Dreieck ABC mit $|AB| = c = 8 \text{ cm}$, $|AC| = b = 6,5 \text{ cm}$ und dem Radius des Umkreises $r_U = 5 \text{ cm}$.

d) Konstruiere das Dreieck ABC mit $\alpha = 75^\circ$, $h_a = 4,3 \text{ cm}$ und $|AB| = c = 4,8 \text{ cm}$.

5. Bei Zinsberechnung gilt: 1 Jahr = 360 Tage; 1 Monat = 30 Tage.

- a) Herr Winter nimmt ein Darlehen von 5600 € für 7 Monate auf. Der Zinssatz beträgt 9 %. Wie viel Euro muss er insgesamt zurückzahlen?
- b) Frau Sommer überzieht ihr Konto für 30 Tage um 900 €. Sie muss dafür 9 € Zinsen bezahlen. Berechne den Zinssatz.
- c) Frau Herbst hat ein Sparguthaben von 2500 €, das mit 4 % verzinst wird. Nach wie vielen Tagen ist das Guthaben auf 2580 € angewachsen?
- d) Herr Lenz möchte 5000 € für 3 Jahre anlegen. Zur Auswahl stehen drei Zinsmodelle; die Zinsen werden jeweils wieder verzinst.
- (1) im 1. Jahr 2 %, im 2. Jahr 3 %, im 3. Jahr 4 %
 (2) im 1. Jahr 3 %, im 2. Jahr 3 %, im 3. Jahr 3 %
 (3) im 1. Jahr 4 %, im 2. Jahr 3 %, im 3. Jahr 2 %
- Begründe durch Rechnung, bei welchem Modell sich das Kapital am besten verzinst.

6. In der Nähe der Orte A-Dorf, B-Stadt und C-Burg soll ein Mobilfunkmast errichtet werden. Die Orte haben folgende Entfernungen voneinander:

A-Dorf nach B-Stadt: 24 km,
 A-Dorf nach C-Burg: 21,6 km,
 B-Stadt nach C-Burg: 17,4 km.

- a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC in verkleinertem Maßstab: Die Entfernung von 24 km wird in der Zeichnung als 8 cm lange Strecke dargestellt.
 (2) Gib den Maßstab der Zeichnung in der Form „1 : x“ an.
- b) Es liegen drei Vorschläge für den Standort des Mastes vor. Kennzeichne in der Zeichnung die jeweils in Frage kommenden Punkte bzw. Gebiete.
- (1) Der Mast soll gleich weit von jedem Ort entfernt stehen. Wie groß ist diese Entfernung?
 (2) Der Mast soll mehr als 9 km aber nicht mehr als 15 km von jedem Ort entfernt stehen.
 (3) Der Mast steht von B-Stadt und C-Burg gleich weit entfernt, jedoch nicht weiter als 15 km von A-Dorf und von B-Stadt.

7. In einem magischen Quadrat ist die Summe in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den Diagonalen immer die gleiche Zahl. In die hier betrachteten Quadrate werden jeweils aufeinander folgende ganze Zahlen eingetragen.

- a) Ergänze zu einem magischen Quadrat und gib jeweils die Summe der Zahlen in jeder Zeile (Spalte, Diagonalen) und die Summe aller Zahlen des magischen Quadrates an. Das Quadrat (1) soll die Zahlen von 1 bis 16 und das Quadrat (2) soll die Zahlen von -7 bis 8 enthalten.

(1)

16	3	2	
		11	
		7	12
4	15	14	

(2)

5			8
	3	2	
	-1	-2	
-7			-4

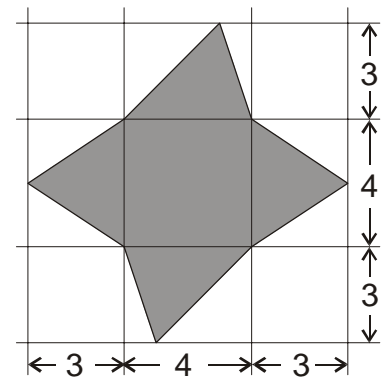
- b) Ein magisches Quadrat besteht aus 16 aufeinander folgenden ganzen Zahlen. Welche Zahlen enthält dieses Quadrat, wenn
- (1) die Summe der Zahlen jeder Zeile 42 beträgt,
 (2) die Summe der Zahlen jeder Zeile -10 beträgt?
- c) Wie groß ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile (Spalte, Diagonalen) bei einem magischen Quadrat, das
- (1) die ganzen Zahlen von -2 bis 6,
 (2) die Zahlen 1 bis 100 enthält?

AUFGABEN DER GRUPPE C

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden diejenigen mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

1. a) Berechne x .
- (1) $18x + 101 = 59 + 12x$
 - (2) $3x - 8 + 4x - 11 = 11x - 5 - 7x + 7$
 - (3) $4(8 - 5x) - 15 = 2(x + 12) - 15x$
- b) Thorsten, Marcel und Paul wiegen zusammen 200 kg. Marcel ist 2 kg schwerer als Thorsten, Paul ist 9 kg leichter als Thorsten. Stelle eine Gleichung auf und berechne, wie schwer jeder der Jungen ist.

2. a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit $|BC| = a = 5,2$ cm, $|AC| = b = 6,5$ cm und $\gamma = 65^\circ$.
- (2) Zeichne die Höhe h_a ein und gib deren Länge an.
- (3) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
- b) Ein Dreieck hat einen Flächeninhalt von 54 cm^2 . Die Seite c ist 12 cm lang. Wie lang ist die dazu gehörende Höhe h_c ?
- c) Berechne den Flächeninhalt der nebenstehenden Figur (Die Maße sind in cm angegeben).



3. Eine Schule will eine Cafeteria einrichten.
- a) Die 640 Schülerinnen und Schüler wurden nach ihrem Lieblingsgericht befragt. Die Befragung ergab folgendes Ergebnis:

Pommes	Spaghetti	Hamburger	Döner	Salat
40 %	160 Schülerinnen und Schüler	$\frac{1}{5}$ der Befragten	10 %	Die übrigen Schülerinnen und Schüler

Stelle die Anteile als Prozentsätze in einem Streifendiagramm der Länge 10 cm dar.

- b) 55 % der Lehrkräfte, das sind 22, wünschen Vollwertgerichte. Wie viele Lehrkräfte hat die Schule?
- c) Für die Cafeteria wird ein Kühlschrank benötigt. Er soll 1200 € ohne Mehrwertsteuer kosten. Wegen eines Räumungsverkaufs wird der Preis um 30 % gesenkt; dazu kommen dann noch 16 % Mehrwertsteuer.
- (1) Berechne den Endpreis.
 - (2) „Der Preis ist doch dann nur um 14 % gesenkt worden“, behauptet der Schulsprecher. Was meinst du dazu? Begründe!
4. Ein Schwimmbecken ist 25 m lang, 8 m breit und 2 m tief.
- a) Die Wände und der Boden des Schwimmbeckens sollen gestrichen werden. Wie viel Quadratmeter müssen gestrichen werden?
 - b) Das Schwimmbecken wird bis zu einer Höhe von 1,8 m gefüllt.
 - (1) Wie viel Kubikmeter Wasser sind dann im Becken?
 - (2) Wie viel Liter Wasser sind im Becken?
 - (3) Die Feuerwehr setzt zwei Pumpen ein, jede Pumpe füllt 9 m^3 Wasser pro Stunde in das Becken. Wie lange dauert die Befüllung?
 - (4) Wie lange dauert die Befüllung, wenn eine weitere Pumpe eingesetzt wird? Gib diese Zeit in Stunden und Minuten an.

