

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2002/2003 DES LANDES HESSEN

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

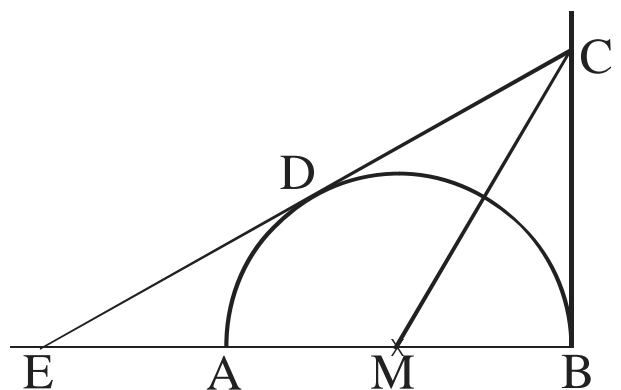
AUFGABEN DER GRUPPE A

1. Gegeben ist die Ungleichung $x^2 \leq a - 5$ mit $x, a \in \mathbb{Z}$.
 - a) Für welche Zahl a hat diese Ungleichung genau eine Lösung?
 - b) Für welche Zahlen a hat diese Ungleichung die Lösungsmenge $L = \{-1, 0, 1\}$?
 - c) Für welche Zahlen a hat diese Ungleichung genau sieben Lösungen?
 - d) Gibt es eine Zahl a , so dass diese Ungleichung acht Lösungen hat? Begründe deine Antwort!
 - e) Für welche Zahlen a hat diese Ungleichung keine Lösungen?

2.
 - a) Konstruiere das Trapez $ABCD$ mit $h_a = 4$ cm, $\delta = 110^\circ$, $\beta = 60^\circ$ und $|AC| = 7$ cm.
 - b) Konstruiere das Viereck $ABCD$ mit $|AB| = 4$ cm, $|BC| = 7$ cm, Umkreisradius des Vierecks $r = 6$ cm, wobei die Diagonalen des Vierecks senkrecht aufeinander stehen.
 - c) Konstruiere das Viereck $ABCD$ mit $|AB| = 10$ cm, $|BC| = 6$ cm, $\beta = 80^\circ$ und dem Radius des Inkreises des Vierecks $r = 3,5$ cm.

3. Kaufhaus Brinkmeyer wirbt:
 - **Jeder, der heute im Geschäft einen Handstand macht, erhält einen Gutschein über 20 €, die er von der Endrechnung abziehen kann.**
 - **Auf alle Artikel gibt es einen Rabatt von 10 %.**
 - **Beim Kauf von 5 T-Shirts, 5 Blusen oder 5 Sweat-Shirts müssen nur 4 bezahlt werden.**Lena, Natascha und Karin machen einen Handstand.
 - a) Lena kauft 5 Blusen. Eine Bluse würde ohne jeden Rabatt 10 € kosten. Wie viel Euro muss sie bezahlen? Wie viel Prozent hat sie insgesamt gespart?
 - b) Natascha kauft 5 T-Shirts und muss nur 16 Cent bezahlen. Wie viel kostet ein T-Shirt?
 - c) Karin kauft 5 Sweat-Shirts. Inklusiv aller Rabatte spart sie 60 Prozent. Wie viel kostet ein Sweat-Shirt?

4. Die Geraden CB und CD sind Tangenten an den Halbkreis mit dem Mittelpunkt M und dem Durchmesser $|AB|$.
 - a) Beweise, dass das Dreieck MCD und das Dreieck MBC kongruent sind.
 - b) Weise nach, dass gilt: $\triangle DCB$ und $\triangle DME$ sind gleich groß.
 - c) In der vorgegebenen Figur gilt: $|AB| = |MC|$.
 - (1) Beweise: Das Dreieck ABD und das Dreieck MBC sind kongruent.
 - (2) Berechne die Größe des Winkels $\triangle BEC$.



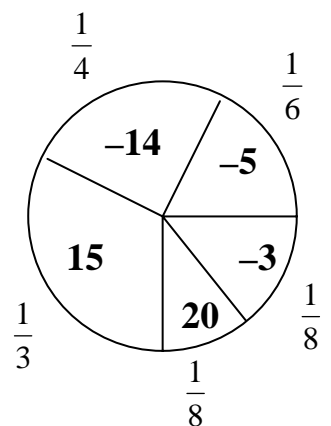
5. Ein Würfelspiel besteht aus einem Spielfeld mit 101 Feldern, welche von -50 bis 50 nummeriert sind, und einem Würfel mit den Zahlen $-1, -3, -5, 2, 4, 6$. Es gilt folgende Spielregel: Besetzt der Spielstein das Feld x und würfelt der Spieler die Zahl z , so wird der Spielstein auf das Feld y gesetzt; dabei gilt:
- $$y = x + z + x \cdot z.$$
- Ergibt sich dabei eine Zahl größer als 50 oder kleiner als -50 , so wird der Spielstein wieder auf das Startfeld **[0]** gesetzt.
- a) (1) Zu Beginn des Spieles sitzt der Spielstein auf dem Feld **[0]**. Auf welchen Feldern kann der Spielstein nach dem 1. Wurf sitzen?
 (2) Der Spielstein sitzt auf dem Feld **[-5]**. Der Spieler würfelt die Zahl z . Welche Felder können nun besetzt werden?
- b) (1) Der Spielstein besetzt das Feld x . Die Würfelzahl ist -1 . Auf welches Feld y wird der Spielstein dann gesetzt?
 (2) Zeige, dass das Feld **[-1]** das einzige Feld ist, von dem der Spielstein nicht mehr weggesetzt werden kann; das Feld **[-1]** wird demnach als Falle bezeichnet.
- c) Alex würfelt und setzt den Spielstein auf das Feld **[19]**. Wo kann der Spielstein vorher gestanden haben und welche Zahl hat Alex dann jeweils gewürfelt?
- d) Rainer würfelt und setzt den Spielstein von einem Feld x auf ein anderes Feld, das von **[0]** die gleiche Entfernung wie x hat. Auf welchem Feld stand der Spielstein und welche Zahl hat Rainer gewürfelt, wenn er nicht in der Falle landet?

6. Im letzten Jahr (2002) fielen der 13. September und der 13. Dezember auf einen Freitag.
- a) Fällt in jedem Jahr, in dem der 13. September ein Freitag ist, auch der 13. Dezember auf einen Freitag (Begründung!)?
- b) Der 13. Februar des Jahres X fällt auf einen Freitag. Bestimme den nächstfolgenden Freitag, den 13. für den Fall, dass
- (1) das Jahr X ein Schaltjahr ist,
 (2) das Jahr X kein Schaltjahr ist.
- c) Der 13. März eines Schaltjahres ist ein Freitag. In welchen Monaten des Vorjahres gab es Freitag, den 13.?
- d) Könnte es theoretisch auch ein ganzes Kalenderjahr ohne Freitag, den 13. geben? Begründe deine Antwort!

7. Nebenstehendes Glücksrad ist in 5 Sektoren aufgeteilt, deren Anteil an der Gesamtfläche durch den jeweiligen Bruch angegeben ist.

Andreas und Michael spielen gegeneinander. Dabei addieren beide nach jedem Drehen ihre eigenen Punktzahlen.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Andreas nach dem ersten Drehen einen positiven Punktestand?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Michael nach zweimaligem Drehen mindestens 25 Punkte?
- c) Der momentane Spielstand beträgt 100 Punkte für Andreas und 40 Punkte für Michael. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Michael das Spiel gewinnen, wenn jeder noch zweimal drehen darf?
- d) Michael hat 4 Runden nach Spielbeginn erneut den Punktestand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit hierfür?



Beachte: Die Ergebnisse können als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden!

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2002/2003 DES LANDES HESSEN

Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE B

1. Gib jeweils die Lösung in aufzählender Form an. $G = Z$.

- a) $4(7x - 9) = x - (-3 - 14x)$
- b) $7(3x - 1) < 9x + 3$
- c) $(5x + 2)(5x - 2) = (5x)^2 - 4$
- d) $(6x - 4)^2 = 9 - (5x - 4)(4 - 7x)$

2. Die Firma Nah-Fern bietet für Umzüge einen Lkw an. Es gibt zwei Angebote:

Angebot A: 63 € Tagesmiete plus 0,36 € pro km

Angebot B: 72 € Tagesmiete plus 0,18 € pro km

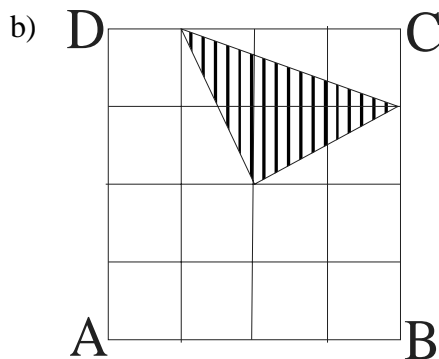
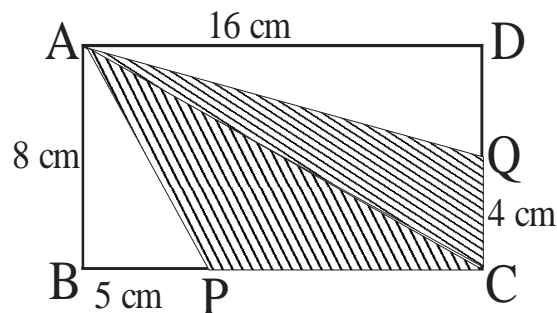
- a) Herr Schnell benötigt das Fahrzeug einen Tag und will 200 km fahren. Wie viel muss er nach Angebot A bzw. Angebot B bezahlen?
- b) Frau Braun entscheidet sich für das Angebot A. Sie mietet den Lkw für 3 Tage und fährt 950 km. Berechne die Gesamtkosten.
- c) Frau Hermann wählt das Angebot A. Für 2 Tage bezahlt sie 216 €. Wie viel km ist sie gefahren?
- d) Herr Max erhält eine Rechnung nach Angebot B von 198 €. Wie viel km kann er gefahren sein?
- e) Herr Moritz benötigt den Lkw für einen Tag. Gib eine Empfehlung, ab welcher Fahrstrecke das Angebot B günstiger ist.

3. **BEACHTE: Runde, falls nötig, auf eine Stelle nach dem Komma.**

- a) Im vorigen Jahr besuchten 125 Schülerinnen und Schüler den 8. Jahrgang. In diesem Schuljahr sind im gleichen Jahrgang 120 Schüler. Um wie viel Prozent hat die Schülerzahl abgenommen?
- b) Von den 120 Schülerinnen und Schülern sind 20 % im Chor. Von den Chormitgliedern spielen $33\frac{1}{3}$ % ein Instrument. Wie viel Prozent der Achtklässler spielen ein Instrument und sind im Chor?
- c) Von den 120 Schülerinnen und Schülern spielen 50 % Handball. Von den Jungen der Jahrgangsstufe spielen zwei Drittel Handball. 45 % der Achtklässler sind Mädchen.
 - (1) Wie viele Jungen, wie viele Mädchen spielen Handball?
 - (2) Wie viel Prozent der Mädchen spielen Handball?

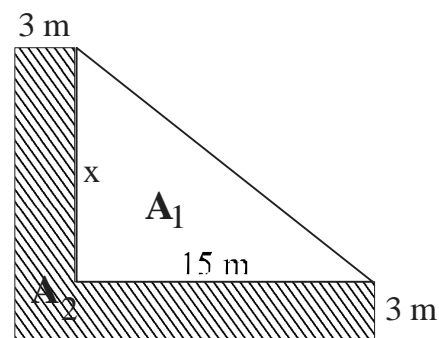
4. a) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen $|BC| = a = 5,8$ cm, $|AB| = c = 4,5$ cm und $\alpha = 59^\circ$
- (2) Führe die Punktspiegelung des Dreiecks ABC an B durch, benenne die Bildpunkte mit A', B' und C'.
- b) (1) Konstruiere das Dreieck ABC mit den Seitenlängen $|BC| = a = 6$ cm, $|AC| = b = 4,2$ cm, bei dem die Seitenhalbierende s_a von a die Länge 6,1 cm hat.
- (2) Benenne den Mittelpunkt der Seite \overline{BC} mit D. Verschiebe das Dreieck ABC so, dass C' auf D fällt, bezeichne die Bildpunkte mit A', B', C'.
- c) (1) Konstruiere das symmetrische Drachenviereck ABCD mit der Seitenlänge $|BC| = b = 3,2$ cm und den Diagonallängen $|AC| = e = 7,2$ cm, $|BD| = f = 4$ cm.
- (2) Spiegele das Drachenviereck ABCD an der Geraden AB, nenne die Bildpunkte A', B', C', D'.
- (3) Zeichne einen Punkt Q so, dass das Viereck AD'QD eine Raute ist.

5. a) (1) Im Rechteck ABCD sind die Dreiecke APC und ACQ eingezeichnet. Berechne deren Flächeninhalte.
 (2) Wie weit müsste P auf der Strecke \overline{PC} verschoben werden, damit die Flächeninhalte der Dreiecke APC und ACQ gleich groß sind?



- b) (1) Das Quadrat ABCD hat die Seitenlänge $a = 4$ cm und ist in 16 gleich große Quadrate unterteilt. Bestimme den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.
 (2) Gib den Flächeninhalt der schraffierten Fläche als Bruchteil der Quadratfläche an.
 (3) Wie groß ist der Flächeninhalt der schraffierten Fläche, wenn die Seitenlänge a des Quadrates 10 cm beträgt?

- c) Wie groß muss x sein, damit A_1 und A_2 den gleichen Flächeninhalt haben?



6. a) Ein Zahnrad mit 216 Zähnen wird um 40° gedreht.
 (1) Um wie viele Zähne ist dieses Zahnrad gedreht worden?
 (2) Ein zweites Zahnrad mit 144 Zähnen greift in das erste ein. Um welchen Winkel ist das zweite Zahnrad mitgedreht worden?
 (3) Ein drittes Zahnrad greift in das zweite Zahnrad ein. Bei der Drehung des ersten Zahnrades um 40° hat das dritte Zahnrad genau zwei Umdrehungen mitgemacht. Wie viele Zähne hat das dritte Zahnrad?
 b) Die Räder einer anderen Zahnradkombination haben 216 Zähne, 144 Zähne und 18 Zähne.
 (1) Beim Start steht bei jedem Zahnrad ein Zahn ganz oben, dieser Zahn wird jeweils markiert. Nach wie vielen Umdrehungen der Räder sind alle Markierungen zum ersten Mal wieder gleichzeitig genau ganz oben?
 (2) Bei dieser Zahnradkombination dreht sich das kleinste Zahnrad 6-mal. Um welchen Winkel hat sich das größte Zahnrad dabei gedreht?

7. Die Skizze zeigt zwei Kartenhäuser. Ein Kartenhaus mit 3 Stockwerken besteht aus 6 „Wohnungen“ und insgesamt 15 Karten, wobei nur die Wohnung Nr. 2 keine „Außenwohnung“ ist.

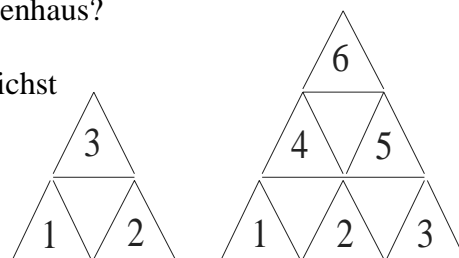
- a) (1) Wie viele Wohnungen gibt es in einem vierstöckigen Kartenhaus?
 (2) Wie viele Karten benötigt man für 4 Stockwerke?

- b) Aus den 110 Karten eines Rommé-Spieles soll ein möglichst großes Kartenhaus gebaut werden.

- (1) Wie viele Stockwerke hätte dieses Haus?
 (2) Wie viele Karten bleiben übrig?

- c) (1) Wie viele Stockwerke müsste ein Haus mindestens haben, damit die Wohnungsnummer 15 vergeben werden kann?

- (2) Es gibt vier weitere Häuser, in denen die Wohnung Nr. 15 eine Außenwohnung ist. Nenne für alle Möglichkeiten die Anzahl der Stockwerke.



MATHEMATIK-WETTBEWERB 2002/2003 DES LANDES HESSEN

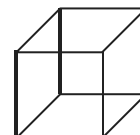
Hinweis: Von jeder Schülerin / jedem Schüler werden vier Aufgaben gewertet. Werden mehr als vier Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE C

- Die Klasse 8a (28 Schülerinnen und Schüler und 2 Begleitpersonen) fährt mit dem Bus in den Safaripark.
 - Die Fahrstrecke beträgt 135 km. Wie viele Stunden und Minuten braucht der Bus bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 75 km pro Stunde?
 - Der Eintritt kostet 9 € pro Person. Beim Kauf von 10 Eintrittskarten muss nur der Preis für 9 Karten bezahlt werden. Wie viel muss jeder bezahlen, wenn der Gesamtpreis gleichmäßig aufgeteilt wird?
 - Bei der Rundfahrt erfährt die Klasse, dass das Futter für die 10 Giraffen noch 24 Tage reicht. Wie lange reicht das Futter, wenn noch zwei Giraffen aus dem benachbarten Zoo hinzukommen?
 - Sergej fährt auf der Go-Kart-Bahn 3 Runden in 35,7 Sekunden. Schafft er 10 Runden in 2 Minuten? Begründe.

- Gib jeweils die Lösungsmenge an. $G = \mathbb{Z}$.
 - $14 - (x + 9) = 2x - 4$
 - $5 \cdot (13x - 5) + 3x + 21 = (3 + 8x) \cdot 8$
 - Stelle zunächst jeweils eine Gleichung auf.
 - Wenn man 15 zum Dreifachen einer Zahl addiert, so erhält man das Sechsfache der Zahl. Wie heißt diese Zahl?
 - Ein Autofahrer ist in zwei Tagen 1200 km gefahren. Am zweiten Tag hat er 250 km mehr zurückgelegt als am ersten. Berechne seine Fahrstrecke für den ersten und für den zweiten Tag.

- Die Summe aller Kantenlängen eines Würfels beträgt 48 cm. Berechne die Oberfläche und das Volumen des Würfels.



- Das Volumen eines Quaders beträgt 1224 cm^3 , er ist 9 cm breit und 8 cm hoch. Wie lang ist der Quader?

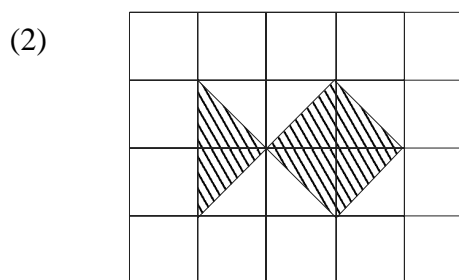
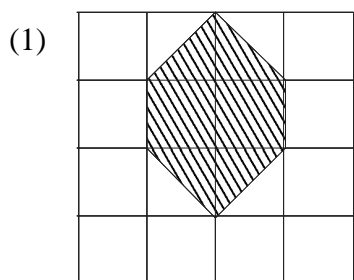
- Die Oberfläche eines Quaders mit quadratischer Grundfläche (Seitenlänge 5 cm) beträgt 190 cm^2 . Berechne seine Höhe.



- Die Punkte $A(0|4)$, $B(2|1)$ und $C(7|4)$ sind Eckpunkte eines symmetrischen Drachenvierecks ABCD.
 - Zeichne das Drachenviereck in ein Koordinatensystem (Einheit 1 cm) und gib die Koordinaten von Punkt D an.
 - Zeichne die Diagonalen ein und berechne den Flächeninhalt des Drachenvierecks.
 - Spiegele das Drachenviereck an der Diagonalen \overline{BD} .
 - Berechne den Flächeninhalt des Vierecks $C'BCD$.

5. Gegeben sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 100.
- (1) Schreibe alle Zahlen auf, die die Endziffer 2 haben und durch 3 teilbar sind.
(2) Wie viele Zahlen sind durch 8 teilbar?
 - (1) Welche Ziffern kannst du bei der Zahl $43X6$ für X einsetzen, so dass die Zahl durch 3 teilbar ist?
(2) Welche Ziffern kannst du bei der Zahl $606X$ für X einsetzen, so dass die Zahl durch 4 teilbar ist?
 - Nenne zwei Zahlen zwischen 1 und 100, die gleichzeitig alle folgenden Bedingungen erfüllen:
 - bei der Division durch 2 bleibt der Rest 1,
 - bei der Division durch 3 bleibt der Rest 2,
 - bei der Division durch 4 bleibt der Rest 3,
 - bei Division durch 5 bleibt kein Rest.

6. a) Wie viel Prozent der Flächen sind schraffiert?



- b) Berechne die fehlenden Zahlen:

(1) 75 % von 24 ist ___

(2) 25 % von ___ ist 60

(3) ___ % von 250 ist 50

- c) Fritz spart für ein Mountainbike, das 1800 € kostet. Er hat bereits 675 € auf seinem Sparbuch. Wie viel Prozent der Kaufsumme fehlen ihm noch?
- d) Herr Fiedler hat für ein Jahr einen Kredit von 26000 € aufgenommen, für den er 9,5 % Zinsen zahlen muss. Wie viel Euro muss er insgesamt nach einem Jahr zurückzahlen?

7. Bestimme die fehlenden Ziffern.

a)
$$\begin{array}{r} 7418 \\ + 53* \\ + \underline{1*9} \\ 8081 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 1*78 \\ - 2*3 \\ - \underline{957} \\ 268 \end{array}$$

c) $*73* \cdot 2 = 9*70$

d) $4077* : 9 = **31$

e) $7* \cdot 6 + *4 = *94$

f) $10* : 9 - **7 = -9*$

g)
$$\begin{array}{r} 3 * 6 \quad \cdot \quad 4 3 * \\ \hline 1 5 0 4 \\ 1 * 2 8 \\ \hline \quad * 5 * \\ \hline 1 6 2 4 3 2 \end{array}$$