

MATHEMATIK–WETTBEWERB 1997/98 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden 4 Aufgaben gewertet. Werden mehr als 4 Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE A

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an: $G = \mathbb{Z}$.

a) $(x + 5)(x^2 - 9)(x^3 - 8) = 0$

b) $(x - 3)^2(x - 5) = 25(x - 5)$

c) $(x - 3)(x - 9) < 0$

d) $(2x + 7)(2x - 7) > 2x + 7$

2. a) Zug 1 fährt von 8.00 Uhr bis 8.30 Uhr die 40 km lange Strecke von A nach B. Nach einem 15-minütigen Halt fährt er anschließend die 60 km lange Strecke von B nach C, wo er um 10.00 Uhr ankommt. Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fährt dieser Zug von A nach B bzw. von B nach C?

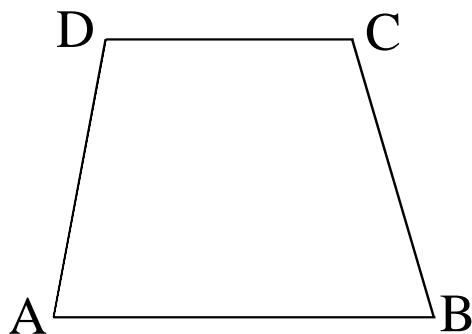
b) Um 8.30 Uhr fährt ein Zug 2 von A dieselbe Strecke nach C, ohne zu halten. Um 10.00 Uhr ist er noch 10 km von C entfernt. Wann muß dieser Zug frühestens und wann spätestens von A abfahren, damit er den Zug 1 während dessen Stopps in B überholen kann?

c) Zug 3 fährt normalerweise von A nach C mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Aufgrund von Gleisarbeiten kann er teilweise nur $20 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und trifft daher mit 12 Minuten Verspätung ein. Wie viele km mußte er langsamer fahren?

3. a) Konstruiere ein Trapez, das einen Inkreis besitzt, mit den Größen $|AB| = 10 \text{ cm}$, $\alpha = \angle BAD = 50^\circ$ und dem Inkreisradius $r_i = 3 \text{ cm}$.

b) Konstruiere ein symmetrisches Trapez ($|AD| = |BC|$) mit den Größen $b = |BC| = 6 \text{ cm}$, $e = |AC| = 9 \text{ cm}$ und $a - c = |AB| - |CD| = 4 \text{ cm}$.



4. a) Zeichne ein Rechteck ABCD mit $|AB| = 9 \text{ cm}$ und $|BC| = 4 \text{ cm}$.

b) Zeichne zwei zu AC parallele Geraden g und h :

(1) die Gerade g, welche durch den Punkt D verläuft,

(2) die Gerade h, welche durch den Punkt B verläuft.

c) Fülle das Lot von C auf h und benenne den Lotfußpunkt mit E; fülle das Lot von A auf g und benenne den Lotfußpunkt mit F. Zeichne das Viereck AECF.

d) Begründe: Das Viereck AECF ist ein Parallelogramm.

e) Der Schnittpunkt von AE und BC ist P. Begründe:

(1) Der Flächeninhalt des Parallelogramms AECF ist gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks ABCD.

(2) Die Dreiecke ABP und PEC sind flächeninhaltsgleich.

5. Die Darstellung natürlicher Zahlen im Dreiersystem ist für technische Anwendungen von Vorteil. In diesem System werden nur die Ziffern 0, 1 und 2 benutzt. Zur Kennzeichnung dieser Zahlen wird das Zeichen (3) benutzt.

Beispiele:

$$102_{(3)} = 1 \cdot 9 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11$$

$$2120_{(3)} = 2 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 69$$

- a) Rechne jeweils in das andere Zahlssystem um:

$$(1) 86 = \quad (2) 121212_{(3)} =$$

- b) Woran kann man in der Darstellung natürlicher Zahlen im Dreiersystem erkennen, daß sie

(1) durch 3 teilbar sind?

(2) durch 9 teilbar sind?

- c) Woran kann man bei einer im Dreiersystem 5-stelliger Zahl erkennen, daß es sich um eine ungerade Zahl handelt?

6. a) Eine Folge ist durch die Gleichung $a_{n+1} = a_n + 5$ und durch $a_1 = 2$ definiert. Daraus erhält man dann $a_2 = 7$, $a_3 = 12$, $a_4 = 17$, $a_5 = 22$. Gib die Zahlen a_6 , a_7 , a_8 an.

- b) Von der Folge b_n sind $b_1 = 2$, $b_2 = 6$, $b_3 = 12$, $b_4 = 20$, $b_5 = 30$ bekannt.

(1) Gib die Zahlen b_6 , b_7 , b_8 an.

(2) Berechne $b_{n+1} - b_n$.

- c) Eine Folge c_n ist durch die Gleichung $c_{n+1} = 3c_n + 4$ und durch $c_1 = 2$ definiert.

(1) Gib die Zahlen c_2 , c_3 , c_4 an.

(2) Berechne $c_6 - c_5$.

(3) Für welche Zahl n gilt: $c_{n+1} - c_n = 8 \cdot 3^{100}$?

7. Am Schulfest wird ein Zahlen-Lotto veranstaltet. Von 9 Kugeln, die von 1 bis 9 numeriert sind, werden 3 Kugeln auf einmal gezogen; als Ergebnis der Ziehung werden die Ziffern in aufsteigender Form angegeben.

- a) (1) Wie viele Ergebnisse mit 3 aufeinanderfolgenden Zahlen sind möglich?

(2) Wie viele Ergebnisse mit genau 2 aufeinanderfolgenden Zahlen sind möglich?

- b) Das Ergebnis der 1. Ziehung war 3, 5 und 9.

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden dieselben Zahlen bei der 2. Ziehung wieder gezogen?

(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird genau eine dieser Zahlen bei der 2. Ziehung wieder gezogen?

(3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden genau 2 dieser Zahlen bei der 2. Ziehung wieder gezogen?

BITTE BEACHTEN : Angabe der Wahrscheinlichkeiten als Produkt oder Summe genügt!

MATHEMATIK–WETTBEWERB 1997/98 DES LANDES HESSEN

Hinweis : Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden 4 Aufgaben gewertet. Werden mehr als 4 Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE B

1. Gib die jeweilige Lösungsmenge in aufzählender Form an: $G = \mathbb{Z}$.

- $2(2x - 1) = x - (2x + 2)$
- $(2x - 1) \cdot 3 < 8x + 3$
- $(2x - 1)(2x + 2) = 4x^2 - 6$
- $(2x - 2)^2 = -4(2x - 1) + 4$

2. a) Frau N. kauft einen neuen Pkw, dessen Listenpreis 28500 DM beträgt. Sie erhält 1995 DM Rabatt. Wieviel % Rabatt erhält sie?

b) Herr P. erhält beim Kauf eines Neuwagens 2 % Rabatt auf den Listenpreis und 7500 DM für seinen Gebrauchtwagen. Er muß noch 21410 DM bezahlen. Wieviel DM beträgt der Listenpreis?

c) Ein Pkw verliert jährlich 10 % seines jeweiligen Zeitwertes. Um wieviel % hat sich der Neuwert des Pkw's nach 2 Jahren verringert?

3. a) Zeichne in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A(2|-1)$, $B(8|1)$ und $C(5|5)$.

b) Spiegele den Punkt B an AC. Zeichne das Viereck ABCB' und bestimme seinen Flächeninhalt, ohne zu messen.

c) Halbiere die Seiten des Vierecks ABCB'. Benenne die Seitenmitte von \overline{AB} mit D, von \overline{BC} mit E, von $\overline{CB'}$ mit F, von $\overline{B'A}$ mit G. Verbinde die Seitenmitten zum Viereck DEFG. Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks DEFG, ohne zu messen.

d) Wo müßte auf der gegebenen Dreieckseite \overline{AB} ein Punkt P liegen, damit bei entsprechender Konstruktion (Spiegelung von P an AC, Halbierung der Seiten des Vierecks APCP') das entsprechende Viereck DEFG ein Quadrat ist? Gib die Koordinaten von P an!

4. Ein Gasthaus will Wege und Terrassen mit zwei verschiedenen Plattentypen pflastern.

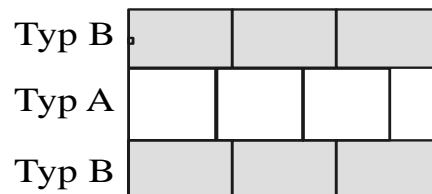
Typ A: 40 cm x 40 cm, Typ B: 30 cm x 50 cm.

a) Es soll eine quadratische Terrasse von 12 m Seitenlänge gepflastert werden.

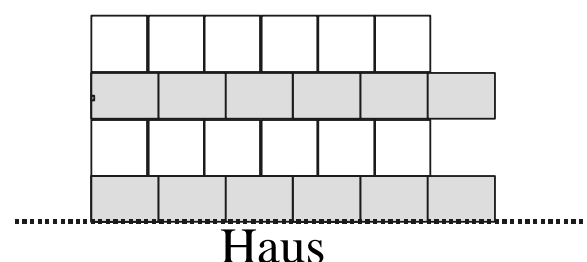
(1) Es wird nur mit Platten des Typs A gepflastert. Wie viele Platten sind nötig?

(2) Es wird nur mit Platten des Typs B gepflastert. Wie viele Platten sind nötig?

b) Ein Fußweg (siehe Skizze) von 1 m Breite und 6 m Länge soll so angelegt werden, daß beide Plattentypen reihenweise abwechselnd verwendet werden. Wie viele Platten von jedem Typ sind dazu nötig?



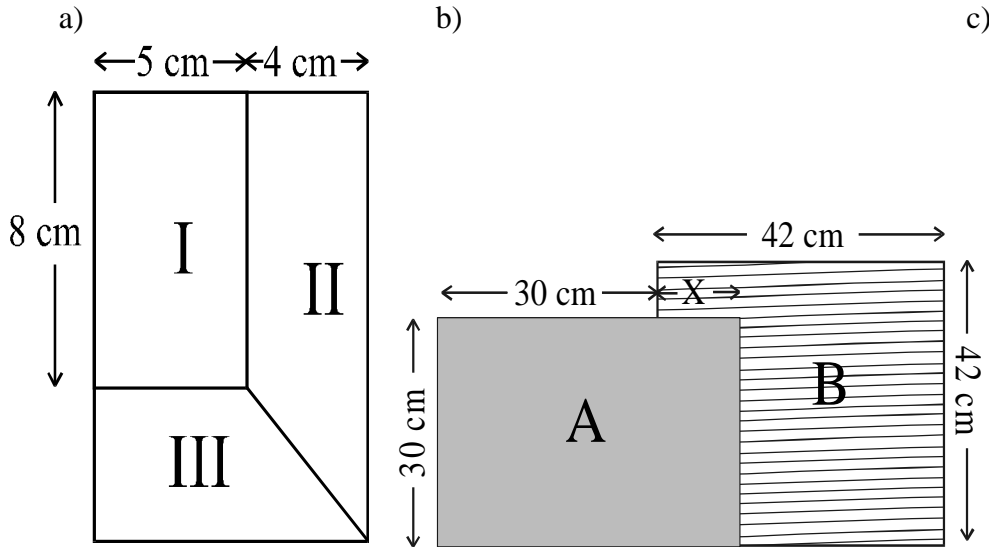
c) An der Südseite des Hauses wird eine quadratische Terrasse mit beiden Plattentypen angelegt, ohne eine Platte zu zerschneiden. Die Anzahl der Reihen ist gerade. Die Platten werden reihenweise abwechselnd gelegt; mit der Längsseite des Typs B parallel zum Haus (siehe Skizze).



(1) Bestimme den kleinstmöglichen Flächeninhalt der Terrasse.

(2) Wie viele Platten von jedem Typ werden verwendet?

5. a) Ein Rechteck ist in drei Teilflächen zerlegt. Der Flächeninhalt des Vierecks I ist gleich dem Flächeninhalt des Vierecks II. Berechne den Flächeninhalt des Vierecks III.
 b) Der Flächeninhalt des grauen Rechtecks A ist gleich dem Flächeninhalt des schraffierten Sechsecks B. Berechne die Länge der Strecke x.
 c) Von einem Quadrat wird die 324 cm² große graue Fläche abgeschnitten. Berechne die Seitenlänge y der Restfläche.



6. Die Zahlen 2, 3, 5, 7, ...19, ..., 31, ... sind Primzahlen. Primzahlen sind Zahlen, die genau zwei verschiedene Teiler besitzen. **Beachte:** 1 ist keine Primzahl.
 a) Nenne die 3 größten zweistelligen Primzahlen.
 b) (1) Zerlege 125 in ein Produkt aus gleichen Primzahlen.
 (2) Zerlege 110 in ein Produkt aus verschiedenen Primzahlen.
 c) (1) Nenne die größte dreistellige Zahl, die sich in ein Produkt aus 3 gleichen Primzahlen zerlegen läßt.
 (2) Nenne die kleinste dreistellige Zahl, die sich in ein Produkt aus 3 verschiedenen Primzahlen zerlegen läßt.
 d) Nenne alle Zahlen zwischen 120 und 150, die sich in ein Produkt aus 3 Primzahlen, von denen jeweils zwei gleich sind, zerlegen lassen.

7. Ersetze die Symbole durch die Ziffern 1, 2, 3, ..., 9, so daß wahre Aussagen entstehen. Gleiche Symbole in einer Aufgabe bedeuten gleiche Ziffern, verschiedene Symbole bedeuten unterschiedliche Ziffern.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} \square \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ \hline \square \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 1 \\ + 555 \\ + 555 \\ \hline 1111 \end{array}$$

a)
$$\begin{array}{r} \square \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ \hline \square \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} \square \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ + \diamond\diamond\diamond \\ \hline \square\diamond\diamond \end{array}$$

Schreibe alle drei Lösungen auf!

- c) $\square : \diamond\diamond\diamond = \square$ Wie viele Lösungen gibt es insgesamt? Schreibe zwei Lösungen auf.
 d) $\square : \diamond\diamond\diamond = \diamond$ Es gibt zwei Lösungen. Schreibe sie auf.
 e) $\diamond\diamond\diamond \cdot \diamond\diamond = \diamond\square$

Hinweis : Von jeder Schülerin/jedem Schüler werden 4 Aufgaben gewertet. Werden mehr als 4 Aufgaben bearbeitet, so werden die mit der besten Punktzahl berücksichtigt.

AUFGABEN DER GRUPPE C

1. a) Herr Meier bekommt 5400 Liter Heizöl geliefert. Ein Liter kostet 0,42 DM, zuzüglich 15 % Mehrwertsteuer. Wieviel DM muß Herr Meier bezahlen?
 - b) Durch technische Umbauten konnte der jährliche Ölverbrauch von 5400 Liter auf 3780 Liter gesenkt werden. Wie hoch war die Einsparung in Prozent?
 - c) Herrn Meiers Öltank ist noch zu 40 % gefüllt. Damit der Tank wieder voll ist, müssen 4200 Liter Öl nachgefüllt werden. Wieviel Liter Öl faßt der Tank?
-

2. a) Berechne jeweils den Wert des Terms bzw. $x!$

	x	y	$2 \cdot x - 3 \cdot y$	Wert des Terms
Beispiel	+5	+3	$2 \cdot 5 - 3 \cdot 3$	+1
(1)	+3	+5		
(2)	-5	+3		
(3)	+3	-5		
(4)		-3		+17

- b) Bestimme jeweils die Lösungsmenge; $G = \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$.

(1) $3 \cdot (4x - 8) = 5 \cdot (2x + 8)$

(2) $2 \cdot (3x - 4) = -20$

(3) $88 + 4 \cdot (5x - 15) < 3 \cdot (6x + 10)$

3. Ein Lkw-Laderaum hat folgende Innenmaße: Länge: 6,00 m, Breite: 2,40 m, Höhe: 1,80 m.

- a) Bestimme das Volumen des Laderaums in m^3

- b) Die vier Laderaumwände werden mit Blech ausgeschlagen. Wieviel m^2 Blech sind dafür nötig?

- c) (1) Wie viele quaderförmige Kartons (60 cm x 40 cm x 20 cm) passen höchstens in den Laderaum?

- (2) Wie viele würfelförmige Kartons (40 cm x 40 cm x 40 cm) passen höchstens in den Laderaum?
-

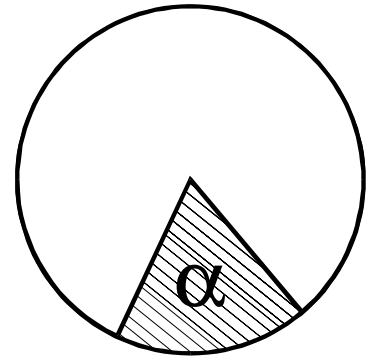
4. a) Beim Verteilen von 100 DM bekommt Andreas 10 DM mehr als Stefan. Wieviel DM bekommt jeder?

- b) Vor zwei Jahren war ein Vater dreimal so alt wie seine Tochter, die heute 14 Jahre alt ist. Wie alt ist der Vater heute?

- c) Eine Erbschaft von 84000 DM wird unter drei Erben A, B und C so aufgeteilt, daß B das Doppelte von C und A das Dreifache von C erhält. Wieviel DM bekommt jeder?
-

5. Die schraffierte Teilfläche des Kreises nennt man Sektor. Seine Größe wird durch den Winkel α bestimmt.

- Wie groß ist der Winkel α , wenn der Kreis in 15 gleich große Sektoren aufgeteilt wird?
- In wie viele gleich große Sektoren wurde ein Kreis aufgeteilt, wenn α jeweils 72° groß ist?
- Ein Sektor eines Kreises stellt 15 % der Kreisfläche dar. Wie groß ist α ?
- Du schneidest mehrere Sektoren mit $\alpha = 65^\circ$ aus Papier aus und legst sie zu einem Kreis zusammen. Dabei überdeckt der letzte Sektor den ersten Sektor teilweise.



- Wie viele Sektoren brauchst Du dafür mindestens?
- Wieviel Grad müssen vom letzten Sektor abgeschnitten werden, damit der Kreis vollständig ausgelegt ist (keine Überdeckung)?

6. In einer Fabrik werden Werkstücke von Maschinen hergestellt.

- In 2 Stunden stellen 5 Maschinen 625 Werkstücke her. Wie viele Werkstücke können von 4 Maschinen in 8 Stunden hergestellt werden?
- Um einen Auftrag zu erledigen, müssen 3 Maschinen 90 Stunden laufen. Wie lange brauchen 5 Maschinen für die Erledigung dieses Auftrages?
- Einen anderen Auftrag erledigen 8 Maschinen in 92 Stunden. Nach 15 Stunden fällt eine Maschine aus. Wie lange dauert nun die Erledigung des Auftrages insgesamt?

7. Eine Bank gibt folgende Wechselkurse bekannt:

1 DM \Leftrightarrow 7 ÖS	1 \$ \Leftrightarrow 1,80 DM	1000 Lire \Leftrightarrow 1,10 DM	1 £ \Leftrightarrow 2,90 DM
-----------------------------	--------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------

- Wieviel DM bekommt man für 8400 ÖS?
- Wieviel \$ bekommt man für 2700 DM?
- Wieviel Lire bekommt man für 3300 DM?
- Wieviel £ bekommt man für 580000 Lire?